



I. الاشتقاق فى نقطة الاشتقاق على اليمين و اليسار:

01. تعريف (تذكير):

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و $l \in \mathbb{R}$ نقول أن: الدالة f قابلة للاشتقاق فى x_0 إذا كان:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l \text{ أو أيضا: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$$

العدد l يسمى العدد المشتق ل f فى x_0 و يرمز له ب: $f'(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

02. خاصية:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق فى x_0 .

- معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f فى النقطة التى أفصولها x_0 هي: $(T): y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$
 - كل دالة قابلة للاشتقاق فى x_0 تكون متصلة فى x_0 . (العكس ليس دائما صحيح).
 - تكون f قابلة للاشتقاق فى x_0 إذا وفقط إذا كان يوجد عدد حقيقي a و توجد دالة ε حيث:
- $$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad \forall x \in D_f \setminus \{x_0\} \text{ مع } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0 \text{ (و فى هذه الحالة } f'(x_0) = a \text{)}$$

03. الدالة التآلفية h ل f بجوار x_0 :

■ تعريف:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق فى x_0 .

الدالة h المعرفة ب: $h(x) = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$ تسمى الدالة التآلفية المماسية ل f بجوار x_0 .
نكتب $f(x) \approx h(x)$ بجوار x_0 (أي h تقرب ل f بجوار x_0)

04. ملحوظة:

منحنى الدالة h هو المستقيم (T) المماس لمنحنى f فى النقطة التى أفصولها x_0

05. نشاط 2:

لنعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقى x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = -3x + 4 & ; x \geq 1 \\ f(x) = x^2 & ; x < 1 \end{cases}$$

1. أدرس اشتقاق f على يمين $x_0 = 1$. ثم أنشئ نصف المماس.

2. أدرس اشتقاق f على يسار $x_0 = 1$. ثم أنشئ نصف المماس.

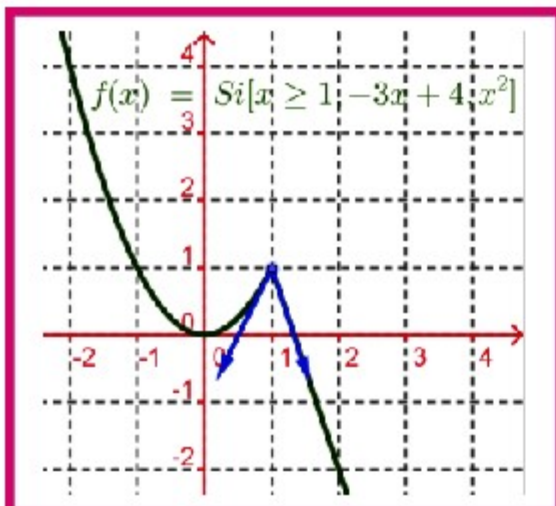
3. هل f قابلة للاشتقاق فى $x_0 = 1$ ؟

4. حدد معادلتى نصفي المماس لمنحنى الدالة f على يمين و يسار النقطة ذات الأفصول $x_0 = 1$.

الجواب

بطريقة مبيانية

ملاحظة: النقطة ذات الأفصول $x_0 = 1$ تسمى نقطة مزواة.



06. تعريف: (الاشتقاق على يمين x_0)

لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0, x_0 + \alpha]$ ، ($\alpha > 0$)

$$f \text{ قابلة للاشتقاق على اليمين في } x_0 \text{ إذا كان } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_d = f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$$

العدد $f'_d(x_0)$ يسمى العدد المشتق على اليمين لـ f .

07. تعريف: (الاشتقاق على يسار x_0)

لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $]x_0 - \alpha, x_0]$ ، ($\alpha > 0$)

$$f \text{ قابلة للاشتقاق على اليسار في } x_0 \text{ إذا كان } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_g = f'_g(x_0) \in \mathbb{R}$$

العدد $f'_g(x_0)$ يسمى العدد المشتق على اليسار لـ f .

08. خاصية:

تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت ما يلي:

- f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 .
- f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 .
- العدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار في x_0 أي $(f'_d(x_0) = f'_g(x_0))$.

09. تمرين تطبيقي:

أدرس اشتقاق f في x_0 (1 : x_0 على اليمين) : $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 0$

(2) $f(x) = \sqrt[4]{x}$; $x_0 = 0$ على اليمين.

(3) $f(x) = [x]$ على اليمين و على اليسار. $x_0 = 0$

(4) $f(x) = \arctan x$; $x_0 = 0$

II. اشتقاق دالة على مجال – الدالة المشتقة الأولى لدالة:

01. تعريف:

- إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في كل نقطة x_0 من $]a, b[$ نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]a, b[$.
- f دالة عددية قابلة للاشتقاق على المجال $]a, b[$ إذا كانت
 - الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]a, b[$
 - f قابلة للاشتقاق على اليمين في a .

02. الدالة المشتقة للدالة:

▪ تعريف:

الدالة التي تربط كل عنصر x_0 من المجال I بالعدد $f'(x_0)$ تسمى الدالة المشتقة لـ f ونرمز لها بـ f'

▪ ملحوظة:

إذا كان : $I =]a, b[$ و $I = [a, b[$ و $I = [a, b]$ نصلح ان : $f'(a) = f'_d(a)$ و $f'(b) = f'_g(b)$



■ مثال : الدالة المشتقة ل $f(x) = x^3$ على \mathbb{R} هي $f'(x) = 3x^2$.

III. جدول الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية: (الجدول 1)

مجموعة تعريف f'	الدالة المشتقة $f'(x) =$	مجموعة تعريف f	الدالة $f(x) =$	مجموعة تعريف f'	الدالة المشتقة $f'(x) =$	مجموعة تعريف f	الدالة $f(x) =$
$D_{f'} =]0, +\infty[$	$\frac{1}{2 \times \sqrt{x}}$	$D_f = \mathbb{R}^{+*}$	\sqrt{x}	$D_{f'} = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$D_f = \mathbb{R}$	a
$D_{f'} = \mathbb{R}$	$\cos x$	$D_f = \mathbb{R}$	$\cos x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$D_f = \mathbb{R}$	x
$D_{f'} = \mathbb{R}$	$\cos x$	$D_f = \mathbb{R}$	$\sin x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_f = \mathbb{R}$	x^n $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$
$\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ و $c \neq 0$	$\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ و $c \neq 0$	$\frac{ax+b}{cx+d}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_f = \mathbb{R}^*$	$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{1\}$
$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$1 + \tan^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\tan x$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$	$D_f = \mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x}$

IV. العمليات على الدوال المشتقة:

01. خاصيات: (أنظر الجدول 2)

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I .					
شرط	مشتقتها	الدالة	شرط	مشتقتها	الدالة
g لا تنعدم على I	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	$\frac{f}{g}$		$(f+g)' = f' + g'$	$f+g$
$n \in \mathbb{N}^*$	$(f^n)'(x) = n \times (f(x))^{n-1} \times f'(x)$	f^n	$\alpha \in \mathbb{R}$	$(\alpha \times f)' = \alpha \times f'$	$\alpha \times f$
f و $n \in \mathbb{Z}^*$ لا تنعدم على I	$(f^n)'(x) = n \times (f(x))^{n-1} \times f'(x)$	f^n		$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$	$f \times g$
			g لا تنعدم على I	$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$	$\frac{1}{g}$

02. أمثلة: أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f في الحالات التالية

أ- $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 1$ ب- $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-1}$ ج- $f(x) = 2x \cos x$ د- $f(x) = 1 + (3x+2)^4$

V. الدالة المشتقة الثانية - المشتقات المتتالية (أو المتتابعة) لدالة f .

1. مفردات:

- المشتقة ل f' تسمى المشتقة الثانية ل f . نرسم لها ب: $(f'(x))' = f''(x) = f^{(2)}(x)$.
- إذا كانت $f^{(2)}$ بدورها قابلة للاشتقاق على I فدالتها المشتقة $(f^{(2)})'(x)$ تسمى المشتقة الثالثة ل f ونرسم لها ب $(f^{(2)})' = f^{(3)}$.

2. بصفة عامة:



المشتقة من الرتبة n للدالة f (أي $f^{(n)}(x)$) هي المشتقة لـ $f^{(n-1)}(x)$ (أي المشتقة من الرتبة $n-1$) $(f^{(n-1)}(x))$ ونرمز لها بـ:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$$

مثال:

أحسب $f^{(3)}(x)$ حيث: أ - $f(x) = x^5$ - ب - $f(x) = \frac{1}{x^2}$ - ج - بين أن: $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

VI. مشتقة مركب دالتين - مشتقة الدالة العكسية

01. مشتقة مركب دالتين:

(1) مبرهنة 1:

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ فإن $g \circ f$ قابلة للاشتقاق في x_0 .
ولدينا: $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$.

(2) مبرهنة 2:

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على I و $f(I)$ على التوالي.
إذا كان x_0 عنصرا من I وكانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق في $f(I)$ فإن $g \circ f$ قابلة للاشتقاق على I .
ولدينا: $\forall x \in I: (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$.

(3) نتائج:

مجموعة تعريف f'	الدالة المشتقة $f'(x) =$	مجموعة تعريف f	الدالة $f(x) =$	مجموعة تعريف f'	الدالة المشتقة $f'(x) =$	مجموعة تعريف f	الدالة $f(x) =$
$D_{f'} = \mathbb{R}$	$f'(x) = -a \times \sin(ax+b)$	$D_f = \mathbb{R}$	$f(x) = \cos(ax+b)$	$x \in D_g$ و $g(x) > 0$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{2 \times \sqrt{g(x)}}$	$x \in D_g$ و $g(x) \geq 0$	$f(x) = \sqrt{g(x)}$
$ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$f'(x) = a \times [1 + \tan^2(ax+b)]$	$ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$f(x) = \tan(ax+b)$	$D_{f'} = \mathbb{R}$	$f'(x) = a \times \cos(ax+b)$	$D_f = \mathbb{R}$	$f(x) = \sin(ax+b)$

(4) مثال:

أحسب $f'(x)$ مع أ - $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ - ب - $f(x) = \cos(2x - 4)$.

جواب:

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 - x})' = \frac{(x^2 - x)'}{2\sqrt{x^2 - x}} = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

$$f'(x) = (\cos(2x - 4))' = (2x - 4)' \cos'(2x - 4) = -2x \sin(2x - 4)$$

02. مشتقة الدالة العكسية

(1) مبرهنة 1:



لتكن f متصلة ورتيبة قطعاً على I (لأن الدالة f تقابل من المجال I إلى المجال $J = f(I)$).
إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0) \neq 0$ فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق في $y_0 = f(x_0)$
لدينا: $(f^{-1})'(y_0) = (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$

(2) برهان :

بمأن f متصلة على I إذن دالتها العكسية f^{-1} متصلة على $J = f(I)$ و منه لكل y_0 من J لدينا $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$
ندرس اشتقاق f^{-1} في y_0 من J . نضع $f^{-1}(y) = x$ و $f^{-1}(y_0) = x_0$ مع x و x_0 من I .
لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} \in \mathbb{R} ; (f'(x_0) \neq 0) \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} ; (f^{-1}(y_0) = x_0) \\ &= \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)} \end{aligned}$$

خلاصة : f^{-1} قابلة للاشتقاق في $y_0 = f(x_0)$ من $J = f(I)$ حيث : $(f^{-1})'(y_0) = (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$

(3) مبرهنة 2 :

لتكن f دالة تقابل من المجال I إلى المجال $J = f(I)$.

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و دالتها المشتقة f' لا تنعدم على I (أي $\forall x \in I ; f'(x) \neq 0$) فإن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق

المجال $J = f(I)$. لدينا : $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$

(4) تطبيق 1 : مشتقة : $\sqrt[n]{x}$ و x^r و $g(x) = [f(x)]^r$. (جدول 4)

$n \in \mathbb{N}^*$ و $r \in \mathbb{Q}^*$ و f موجبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على I

قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$.	$f'(x) = \left((x)^{\frac{1}{n}} \right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$	$f(x) = \sqrt[n]{x}$
	$f(x) = (x^r)' = r x^{r-1}$	$f(x) = x^r$
قابلة للاشتقاق على I	$g'(x) = \frac{1}{n} \times f'(x) \times (f(x))^{\frac{1}{n}-1}$	$g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$
	$g'(x) = ([f(x)]^r)' = r \times f'(x) \times [f(x)]^{r-1}$	$g(x) = [f(x)]^r$



■ أمثلة: أحسب f' مع:

$$f(x) = \sqrt[5]{x^2+1} \quad . f(x) = \sqrt[5]{x^2+1} \quad . f(x) = \sqrt[5]{x}$$

جواب :

$$\left[f(x) = \sqrt[5]{x} \right]' = \left[x^{\frac{1}{5}} \right]' = \frac{1}{5} x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} \quad \bullet$$

$$\left[f(x) = \sqrt[5]{(x^2+1)} \right]' = \left[(x^2+1)^{\frac{1}{5}} \right]' = \frac{1}{5} (x^2+1)' (x^2+1)^{\frac{1}{5}-1} = \frac{14}{7} x (x^2+1)^{-\frac{4}{5}} = \frac{14}{7} x \sqrt[5]{(x^2+1)^4} \quad \bullet$$

$$\left[f(x) = \sqrt[5]{(x^2+1)^7} \right]' = \left[(x^2+1)^{\frac{7}{5}} \right]' = \frac{7}{5} (x^2+1)' (x^2+1)^{\frac{7}{5}-1} = \frac{14}{7} x (x^2+1)^{\frac{2}{5}} = \frac{14}{7} x \sqrt[5]{(x^2+1)^2} \quad \bullet$$

(5) تطبيق 2 : مشتقة الدالة $f(x) = \arctan x$ ثم $f(x) = \arctan(u(x))$.

■ خاصية 1 :

أ- الدالة $f(x) = \arctan x$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و دالتها المشتقة هي $f'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

ب- إذا كانت الدالة $u(x)$ قابلة للاشتقاق على I فإن الدالة $f(x) = \arctan(u(x))$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا :

$$\bullet \forall x \in I : f'(x) = (\arctan(u(x)))' = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$$

■ مثال :

$$\bullet (\arctan(x^3 - 5x))' = \frac{(x^3 - 5x)'}{1+(x^3 - 5x)^2} = \frac{3x^2 - 5}{1+(x^3 - 5x)^2} \quad \bullet$$

$$\bullet (\arctan(\sin x))' = \frac{(\sin x)'}{1+(\sin x)^2} = \frac{\cos x}{1+(\sin x)^2} \quad \bullet$$

$$\bullet (\arctan^7(x^3 - 5x))' = 7(\arctan(x^3 - 5x))' \arctan^6(x^3 - 5x) = 7 \frac{(x^3 - 5x)'}{1+(x^3 - 5x)^2} \arctan^6(x^3 - 5x)$$

$$= \frac{3x^2 - 5}{1+(x^3 - 5x)^2} \arctan^6(x^3 - 5x)$$

VII. مبرهنة رول - مبرهنة التزايد المنتهية :

أ. مطارف دالة عديدة قابلة للاشتقاق.

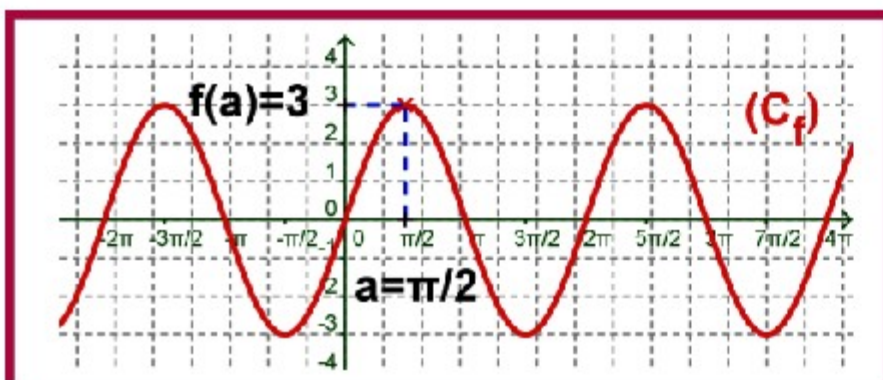
1. نشاط:

المنحنى الآتي يمثل دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I . a عنصر من I .

(1) هل تقبل مطارف في a ؟

(2) أعط قيمة ل $f'(a)$.

(3) أعط الخاصية.





2. خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I . a عنصر من I .
إذا كانت f قابلة للاشتقاق في النقطة a و تقبل مطراف في النقطة a فإن $f'(a) = 0$.

3. ملحوظة :

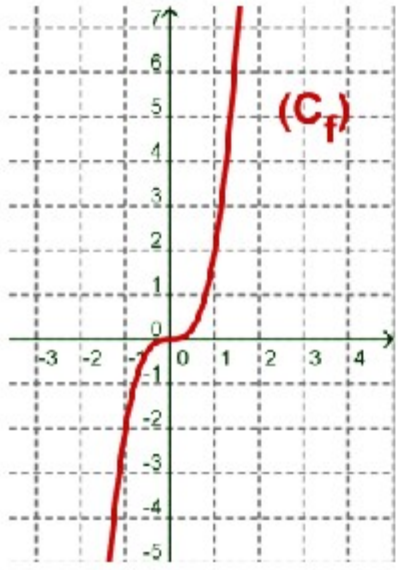
إذا كان $f'(a) = 0$ فهذا لا يعني بالضرورة أن f مطراف للدالة f .

4. مثال :

$f(x) = 2x^3$ لدينا $f'(x) = 6x^2$ ومنه $f'(0) = 0$
ولكن $f(0)$ ليس مطراف ل f .

5. خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I . a عنصر من I
إذا كانت f' تنعدم في النقطة a وتتغير إشارتها بجوار a فإن f مطراف ل f .

الدالة $f(x) = 2x^3$ 

B. مبرهنة رول : théorème de Rolle

1. مبرهنة :

ليكن a و b من \mathbb{R} حيث $a < b$. f دالة عددية تحقق ما يلي :

- أ- f متصلة على القطعة $[a, b]$.
ب- f قابلة للاشتقاق على $]a, b[$.
ج- $f(a) = f(b)$.
- إذن يوجد عنصر c من $]a, b[$ حيث $f'(c) = 0$

2. برهان :

حالة 1 : f دالة ثابتة على $[a, b]$:

بأن f دالة ثابتة على $[a, b]$ إذن $f'(x) = 0$: $\forall x \in]a, b[$.
و بالتالي المبرهنة صحيحة.

حالة 2 : f ليست بدالة ثابتة على $[a, b]$:

بأن f متصلة على القطعة $[a, b]$ إذن $f([a, b]) = [m, M]$ مع $m < M$ لأن f ليست بدالة ثابتة.

نضع : $m = f(\alpha)$ و $M = f(\beta)$ مع α و β من $[a, b]$..

إذن : $\forall x \in [a, b] m = f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) = M$ (1).

• حالة : $\alpha = a$ أو $\alpha = b$ نبين أن : $\beta \in]a, b[$.

بالنسبة ل : $\alpha = a$ لدينا $\beta \neq \alpha$ إذن $\beta \neq a$

نفترض أن : $\beta = b$ إذن $M = f(\beta) = f(b) = f(a) = f(\alpha) = m$ و هذا غير ممكن إذن $\beta \neq b$.

و منه : $\beta \in]a, b[$.

بنفس الطريقة ل $\alpha = b$. نحصل على $\beta \in]a, b[$.

و بالتالي f تقبل مطراف في β (قيمة قصوى حسب (1)).



إذن : $f'(\beta) = 0$ يكفي أن نأخذ $c = \beta$.

3. ملحوظة :

يمكن تطبيق مبرهنة رول حيث f قابلة للاشتقاق على $[a, b]$ و $f(a) = f(b)$

C. مبرهنة التزايدات المنتهية T.A.F

J. مبرهنة :

ليكن a و b من \mathbb{R} حيث $a < b$. f دالة عددية تحقق ما يلي :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{إذن يوجد عنصر } c \text{ من }]a, b[\text{ حيث}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{أ- } f \text{ متصلة على القطعة } [a, b] . \\ \text{ب- } f \text{ قابلة للاشتقاق على }]a, b[. \end{array} \right\}$$

$$\text{أو أيضا يوجد عنصر } c \text{ من }]a, b[\text{ حيث } f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

2. برهان :

نعتبر الدالة g : المعرفة على $[a, b]$ بما يلي : $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x - f(a)$:
الدالة g تحقق ما يلي :

- g متصلة على القطعة $[a, b]$.
- g قابلة للاشتقاق على $]a, b[$.
- $g(a) = g(b)$.

حسب مبرهنة رول $\exists c \in]a, b[: g'(c) = 0$ (2)

أي :

$$(2) \Leftrightarrow \exists c \in]a, b[: \left(f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x - f(a) \right)'_{x=c} = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in]a, b[: \left(f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)_{x=c} = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in]a, b[: f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

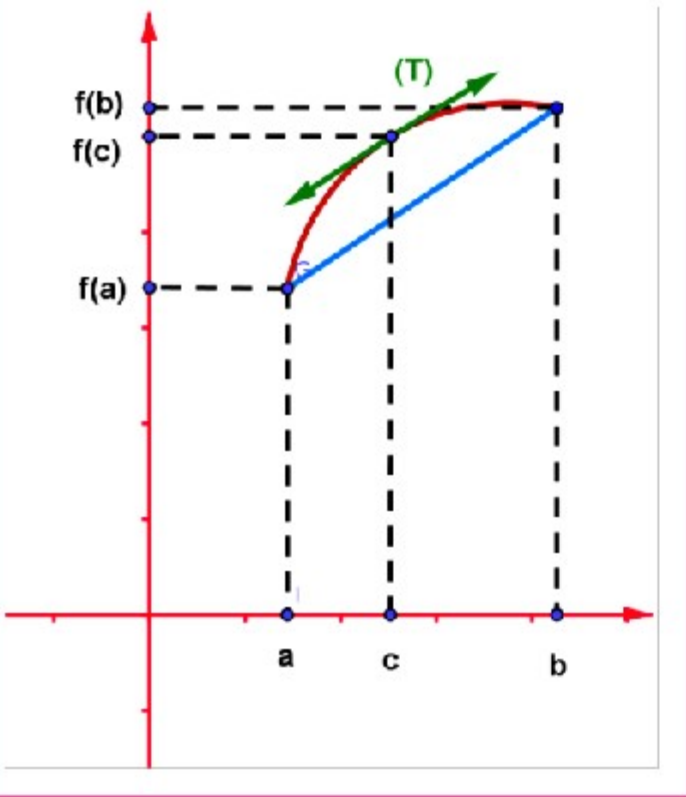
$$\Leftrightarrow \exists c \in]a, b[: f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

3. ملحوظة :

يمكن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية حيث f قابلة للاشتقاق على $[a, b]$

D. تطبيقات مبرهنة التزايدات المنتهية :

J. متفاوتة التزايدات المنتهية :





❖ خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I . k عنصر من \mathbb{R}^+ .
إذا كان : $\forall x \in I \quad |f'(x)| \leq k$ فإن $\forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.
أي : $(\forall x \in I \quad |f'(x)| \leq k) \Rightarrow (\forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|)$.

❖ برهان :

حالة 1 : $x = y$. لدينا : $|f(x) - f(y)| = 0 \leq k|x - y| = 0$ الاستلزام صحيح .
حالة 2 : $x \neq y$. نأخذ : $x < y$ (نفس الشيء ل $y < x$).
لدينا : $[x, y] \subset I$ (لأن I مجال)
بمأن : f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I إذن f قابلة للاشتقاق على $[x, y]$.
إذن : $\exists c \in]x, y[: f(x) - f(y) = (x - y)f'(c)$ (حسب مبرهنة T.A.F)
ومنه : $|f(x) - f(y)| = |(x - y)f'(c)| = |x - y||f'(c)| \leq k|x - y|$ مع $k \geq 0$ و $|f'(c)| \leq k$.
خلاصة : $(\forall x \in I \quad |f'(x)| \leq k) \Rightarrow (\forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|)$

❖ مثال :

نبين : $\forall x, y \in \mathbb{R} : |\cos x - \cos y| \leq |x - y|$

نضع : $f(x) = \cos x$ لدينا : الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و $|\cos x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ومنه حسب متفاوتة التزايدات المنتهية : $|\cos x - \cos y| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

2. إشارة المشتقة الأولى ورتابة دالة :

❖ خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I . k

- إذا كان $\forall x \in I : f'(x) \geq 0$ فإن f تزايدية على I .
- إذا كانت $\forall x \in I : f'(x) > 0$ فإن f تزايدية قطعاً على I .
- إذا كان $\forall x \in I : f'(x) \leq 0$ فإن f تناقصية على I .
- إذا كان $\forall x \in I : f'(x) < 0$ فإن f تناقصية قطعاً على I .
- إذا كان $\forall x \in I : f'(x) = 0$ (على I بكامله) فإن f ثابتة على I .

3. برهان :

ليكن a و b من I مع $a < b$ لدينا : $[a, b] \subset I$ (لأن I مجال).

بمأن : f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I إذن f قابلة للاشتقاق على $[a, b]$.

ومنه حسب مبرهنة T.A.F : $\exists c \in]a, b[: f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

حالة : $\forall x \in I : f'(x) \geq 0$ إذن : $f'(c) \geq 0$ و منه $(b - a)f'(c) \geq 0$ وبالتالي $f(b) - f(a) \geq 0$ أي $f(b) \geq f(a)$
خلاصة : f تزايدية على I .

4. ملحوظة : (يمكن للدالة f' أن تنعدم في نقط منعزلة من I وهذا لا يؤثر على رتابة f)